Exercice :

Soit la suite réelle (u_n) définie sur IR par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$

1°) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$.

a) Montrer que la suite v est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n puis retrouver u_n en fonction de n.

3°) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Calculer S_0, S_1 et S_2.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \geq 2\left(\sqrt{n+2} - 1\right)$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

1) a)

- pour $n = 0$ $\quad 0 \leq u_0 = 1 \leq 1$ (vraie)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. supposons que $0 \leq u_n \leq 1$

et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

- $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ($u_n \geqslant 0$, $\sqrt{u_n^2+1} > 0$) $\geqslant 0$
- $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} - 1$

$= \dfrac{u_n - \sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n^2+1}} \times \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2+1}}{u_n + \sqrt{u_n^2+1}}$